LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 6

Linearni sustavi i njihovo rješavanje

Lekcije iz Matematike 1.

6. Linearni sustavi i njihovo rješavanje

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuje linearni sustav, njegov matrični zapis i rješavanje pomoću inverzne matrice (ako je to moguće), Kramerovim pravilom te Gauss-Jordanovom metodom. Takodjer se obradjuje brz algoritam za odredjivanje determinante i inverzne matrice.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Mnogi se praktični i teoretski problemi svode na linearne sustave. Naime veličine koje se razmatraju, u pravilu nisu nezavisne, već su povezane odredjenim jednadžbama. Najjednostavnija, ali vrlo česta situacija jest ona kad su te jednadžbe linearne. Tada svaka bitno nova jednadžba smanjuje stupanj slobode za 1. Ako veza (broj jednadžba) ima koliko i veličina (nepoznanica), onda se, u praksi, u pravilu dobiva jedinstveno rješenje (stupanj slobode nula), koje se, potom, interpretira kao jedinstveno rješenje problema.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati sustav dviju linearnih jednadžba s dvjema nepoznanicama, pojam rješenja i metode njihova rješavanja (gradivo iz osnovne i srednje škole), te osnovna svojstva matrica i determinanta.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam linearnog sustava. Linearni sustav od m jednadžba s n nepoznanica je sustav oblika:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
.
.
.
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

Brojevi $a_{ij}, i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$ i $b_1, b_2, ..., b_m$ zovu se **koeficijenti**, a $x_1, x_2, ..., x_n$ **nepoznanice**.
Na primjer, za $m = 2$ i $n = 3$ dobije se sustav od dviju jednadžba s trima nepoznanicama:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

Konkretno
Primjer 1.
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

Ako je $m = n$ (tj. ako ima jednako jednadžba kao i nepoznanica), sustav zovemo **kvadratnim n-tog reda**:
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
.
.
.
$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$

Na primjer
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$
je zapis općeg sustava trećeg reda. Konkretno:

Primjer 2.
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

Rješenje linearnog sustava s n nepoznanica - to je svaka uredjena n-torka $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ koja, ako se uvrsti umjesto nepoznanica $(x_1, x_2, ..., x_n)$, zadovoljava sve jednadžbe sustava. Na primjer, trojka $(2, 1, 1)$ rješenje je sustava iz Primjera 1. jer je:
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5$ i
$3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 7.$
Medjutim, i trojka $(1, -1, 0)$ je rješenje tog sustava jer je
$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = 5$ i
$3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 7.$
(taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja).
Da je trojka $(2, 1, 1)$ rješenje sustava pišemo kao $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1)$ ili kao $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Lako se vidi da je $(2, 1, 1)$ jedino (jedinstveno) rješenje sustava iz Primjera 2. Općenito, mogu nastati tri mogućnosti:
1. sustav ima jedinstveno rješenje.
2. sustav ima beskonačno mnogo rješenja
3. sustav nema rješenja.

Matrični zapis sustava. Ako se koeficijenti uz nepoznanice postave u **matricu sustava**, tj. u matricu s m redaka i n stupaca ($m \times n$ matricu)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a slobodni koeficijenti $b_1, b_2, ..., b_m$ i nepoznanice u jednostupčane matrice

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix} \text{ odnosno } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

sustav se kratko može zapisati u matričnom obliku kao

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Na primjer, sustav iz Primjera 2. može se zapisati kao

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Regularni sustav i njegovo rješavanje. Kvadratni linearni sustav zove se **regularnim** ako mu je matrica sustava regularna, tj. ako ima inverznu matricu (determinanta različita od nule). Takav sustav ima jedinstveno rješenje koje se može dobiti prema shemi:

Sustav: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Rješenje: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Uočite analogiju s linearnom jednadžbom
$ax = b$ i njenim rješenjem $x = a^{-1}b$, tj. $x = \frac{b}{a}$,
samo što je kod nje uvjet $a \neq 0$ (da bismo mogli dijeliti s a), a u linearnom sustavu $\det A \neq 0$ (da bi postojala inverzna matrica matrice A).

Primjer 3. U primjeru 2, matrica sustava je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$. Dobije se $\det A = 4$ i $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$
sustav je regularan i rješenje mu je (prema formuli $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$, kako smo i prije dobili.

Rješavanje regularnog sustava Kramerovim pravilom. Regularni sustav može se riješiti i tzv. Kramerovim pravilom (koje je samo raspisana varijanta metode pomoću inverzne matrice). Kako se to pravilo, iako vrijedi općenito, koristi ponajviše za rješavanje sustava 2-gog i 3-eg reda (jer je za sustave većeg reda zamorno), objasnit ćemo ga na konkretnom, već vidjenom primjeru sustava 3-g reda.

Primjer 4. Riješimo Kramerovim pravilom sustav
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

Već smo vidjeli da je determinanta sustava $D = 4$.
Treba još izračunati determinante D_1, D_2, D_3 tako da u determinanti sustava redom zamjenjujemo prvi, drugi, odnosno treći stupac sa stupcem slobodnih koeficijenata.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 4$$

Sad je, prema Kramerovu pravilu:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{4} = 2$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{4} = 1$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{4} = 1$$

kako smo i prije dobili.

Gauss-Jordanova metoda - to je u biti metoda suprotnih koeficijenata (koja se obradjuje već u osnovnoj školi), samo što se ne pišu jednadžbe već se vrše tzv. **elementarne operacije - transformacije** na koeficijentima sustava, odnosno redcima. Metodu ćemo objasniti na već rješavanom primjeru (napomenimo da je ova metoda pogodna **za sve**, a **ne samo za kvadratne**

sustave).

Primjer 5. Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \text{ napisali smo sve koeficijente, slobodne odvojili}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \text{ prvu jedn. množili smo s } -2 \text{ i dodali drugoj}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \text{ prvu jedn. množili smo s } -3 \text{ i dodali trećoj}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \text{ od druge smo oduzeli treću}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \text{ drugu smo podijelili s 2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \text{ drugu smo podijelili s 2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ treću smo podijelili s 2}$$

Do ovog mjesta postupak se obično zove Gaussova metoda; prepoznajemo ga po tome što smo u prvom dijelu matrice došli do gornje trokutaste matrice s jedinicama na dijagonali; njome smo početni sustav sveli na
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 1$
tj. $x_2 = x_3 = 1$ i $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, odakle dobijemo $x_1 = 2$, kako smo i prije imali. Taj nastavak rješavanja katkad je zgodno zapisivati kao i u Gaussovu

postupku, samo što sad idemo od najdonjeg reda prema gore i to se zove Jordanova metoda, a sve skupa Gauss-Jordanova. Pokažimo taj nastavak na ovom primjeru (startamo tamo gdje smo stali):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \text{ od prve smo oduzeli treću}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \text{ od prve smo oduzeli drugu}$$

Sad izravno čitamo $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Primjer 6. Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$
$x_1 - x_2 + x_3 = 2$

Da bismo na početku imali 1 (što je pogodno), treću jednadžbu stavimo na prvo mjesto. Vidimo da smo dobili sustav koji se samo za jedan predznak razlikuje od prethodnog. Vidjet ćemo da taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Postupak ćemo ubrzati tako da ćemo, kad to bude zgodno, obaviti više elementarnih operacija

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -3 & 4 & | & 5 \\ 3 & -4 & 5 & | & 7 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \text{ od druge smo oduzeli 2 prve, a od treće 3 prve;}$$

Dobili smo istu drugu i treću jednadžbu, tako da treću možemo odbaciti, pa od sad imamo samo dva redka

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \text{ drugu smo množili s } -1$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \text{ drugu smo dodali prvoj}$$

Sad stajemo jer smo došli do jedinične 2×2 matrice na lijevom dijelu i očitavamo skup rješenja ovako (u ovisnosti o x_3):
$x_1 = 1 + x_3$
$x_2 = -1 + 2x_3$.
x_3 možemo birati po volji. Na primjer
Za $x_3 = 0$ dobijemo $x_1 = 1$, $x_2 = -1$,
Za $x_3 = 1$ dobijemo $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,
Za $x_3 = \frac{1}{2}$ dobijemo $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, itd.
Uočite da smo tako riješili i sustav iz Primjera 1. U ovom slučaju (kad jednu nepoznanicu biramo po volji) kažemo da je skup rješenja jednodimenzionalan.

Algoritam za računanje determinante Pomoću elementarnih operacija na redcima može se odrediti determinanta; ta je metoda, općenito, neusporedivo brža od one s razvojem po stupcu ili redku. Od postupka u Gauss-Jordanovoj metodi razlikuje se po tome što se pri dijeljenju nekog retka brojem, taj broj treba izlučiti i što se pri zamjeni mjesta dvaju redaka, mijenja predznak.

Primjer 7. Odredimo determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$
Već smo vidjeli da je $\det A = 4$. Sad ćemo to dobiti ovom metodom.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$$

Metoda za odredjivanje inverza matrice. Pomoću elementarnih operacija na redcima može se odrediti inverz matrice; ta je metoda, općenito, neusporedivo brža od one s adjungiranom matricom. Od postupka u Gauss-Jordanovoj metodi razlikuje se po tome što nema zamjene redaka.
Opis metode. Do matrice dodamo jediničnu matricu i vršimo elementarne operacije na redcima dok se jedinična matrica ne pojavi na lijevoj strani. Tada je inverz matrice na desnoj.

Primjer 8. Odredimo inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Inverz smo već računali; sad ćemo to obaviti ovom metodom. Postupak ćemo ponegdje ubrzati.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right] \sim$$
od prvog smo oduzeli i drugi i treći redak.

Sad stajemo jer smo na lijevoj strani dobili jediničnu matricu; inverznu matricu očitavamo na desnoj strani. Vidimo da je, kao i prije:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

V. Pitanja i zadaci

1. Sustav zapišite matrično:
$x_1 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 = 3$
$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$
Je li sustav regularan?

Uputa. Sustav je regularan jer je determinanta matrice sustava -14 što je različito od nule.

2. (i) Kojim se obradjivanim metodama može rješavati sustav
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - x_2 + 7x_3 = 9$?
(ii) Koliko sustav ima rješenja.

Uputa. (i) Samo Gauss-Jordanovom metodom (jer sustav nije regularan - determinante matrice sustava je nula).
(ii) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja (skup rješenja je jednodimenzionalan - jednu nepoznanicu možemo birati po volji).
Naime, treća jednadžba dobije se zbrajanjem prve i druge, pa se može izostaviti. Isto se dobije Gauss-Jordanovom metodom - treći redak postaje nula.

3. Koliko rješenja ima sustav
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8$
$-3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = -12$?

Uputa. Beskonačno mnogo. Skup rješenja je dvodimenzionalan (dva rješenja biramo po volji). Naime, druga se jednadžba dobije iz prve množenjem s 2, a treća množenjem s -3, pa se mogu izostaviti. Na primjer, za $x_2 = x_3 = 0$, iz pove jednadžbe dobijemo $x_1 = 4$; pripadajuće je rješenje $(4, 0, 0)$, a za $x_2 = 1,\ x_3 = 5$ dobijemo $x_1 = -9$; pripadajuće je rješenje $(-9, 1, 5)$ itd. Isto se dobije Gauss-Jordanovom metodom - drugi i treći redak postaje 0.

4. Koliko rješenja ima sustav

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$
$3x_1 - x_2 + 7x_3 = 6$?

Uputa. Sustav nema rješenja.